

Тема 12 Определенный интеграл.

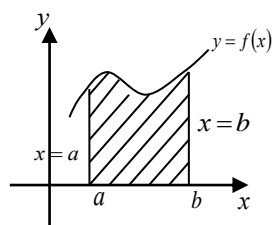
§1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла (задача о площади криволинейной трапеции).

Из школьного курса известны формулы для нахождения площади плоских фигур:

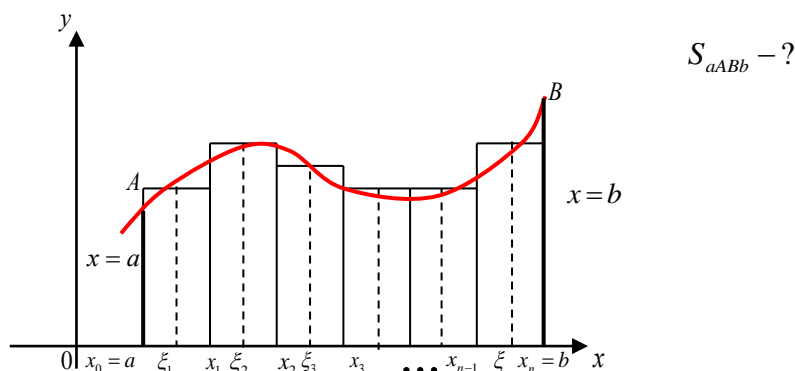
$$a \square - S = a^2 \quad ; \quad h \square^a = S = a \cdot h \quad ; \quad \triangle^h_a = S = \frac{1}{2} a \cdot h \quad ; \quad \square^h_a = S = a \cdot h$$
$$\text{трапеция}^h_{a,b} = S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Пусть требуется вычислить площадь области S , ограниченной некоторой замкнутой кривой.

Определение 1. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная частью кривой $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси OX и двумя прямыми: $x = a$ и $x = b$ параллельными оси OY .



Решим задачу о нахождении площади этой криволинейной трапеции.



Разобьем отрезок $[a; b]$ на « n » частей точками $a = x_0; x_1; x_2 \dots x_n = b$.

Через каждую точку разбиения проведем прямые параллельные оси OY до пересечения с кривой.

Тогда площадь трапеции может быть представлена в виде суммы получившихся в результате указанного разбиения «малых» криволинейных трапеций: $S_{aAbb} = S_1 + S_2 + \dots S_n$

Внутри каждого отрезка разбиения произвольным образом выберем точку. Для отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ эту точку обозначим ξ_i . Из этих точек проведем прямые параллельные оси ОУ до пересечения с кривой $y = f(x)$.

Ординаты точек пересечения равны соответственно $f(\xi_i)$. Каждую малую трапецию заменим прямоугольником с основанием Δx_i и высотой $h = f(\xi_i)$.

Полученную в результате указанных действий ступенчатую фигуру можно рассматривать как приближенное значение искомой площади криволинейной трапеции.

Площади прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, вычисляются соответственно по формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 \\ S_2 &= f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) = f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= f(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) = f(\xi_n) \cdot \Delta x_n \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boxed{\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i} \text{ - площадь ступенчатой фигуры}$$

Отметим, что σ_n тем точнее дает приближенное значение площади криволинейной трапеции, чем больше **n**.

$$\boxed{S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i} \text{ - площадь криволинейной трапеции.}$$

§2. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Произведем следующие действия:

1. Точками $a = x_0; x_1; x_2 \dots x_n = b$ разобьем отрезок $[a; b]$ на «**n**» частей.

2. Внутри каждого отрезка разбиения произвольным образом выберем точки ξ_i и вычислим произведения $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

3. Составим интегральную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

4. Обозначим через $\max \Delta x_i$ максимальную длину отрезка разбиения.

Определение 1. Если при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ существует предел интегральной суммы σ_n , не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части, ни от способа выбора точек, то этот предел называется **определенным интегралом** функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \text{ где}$$

a и b - соответственно нижний и верхний пределы интегрирования;

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение.

Определенный интеграл зависит от пределов интегрирования a , b и от вида подынтегральной функции $f(x)$ и не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) d(u)$$

С **геометрической** точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции.

С **физической** точки зрения определенный интеграл равен работе силы, параллельной перемещению.

§3. Свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b A \cdot f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$$

2. Интеграл алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен соответствующей алгебраической сумме интегралов слагаемых, т.е.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx$$

3. Если отрезок $[a; b]$ разбит на два отрезка $[a; c]$ и $[c; b]$, то интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

5. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

6. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

7. Если $f(x) \geq \varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$$

8. Теорема о среднем:

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то существует точка

$$\xi \in [a; b] \text{ такая, что } \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

С геометрической точки зрения теорема о среднем означает, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади прямоугольника, основание которого совпадает с основанием трапеции $([a;b] \in OX)$, а высота равна значению функции $f(x)$ в некоторой точке ξ отрезка $[a;b]$.

Определение 1. Величина $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

§4. Интервал как функция верхнего предела. Теорема Барроу.

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x) dx$. При этом будем полагать a - фиксированным значением, а b - переменным. Тогда функция верхнего предела $Y(b)$ примет вид:

$$Y(b) = \int_a^b f(t) dt \quad (\text{так как обозначение переменной интегрирования}$$

несущественно).

Желая, как обычно, пользоваться для обозначения независимой переменной буквой x , имеем:

$$Y(x) = \int_a^x f(t) dt \quad - \text{интеграл с переменным верхним пределом.}$$

Теорема Барроу. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то производная определенного интеграла как функции его верхнего предела равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования.

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

Из сформулированной теоремы следует, что $\int_a^x f(t) dt$ является первообразной функции $f(x)$.

Пример: $\left(\int_2^x \cos^3 t dt \right)' = \cos^3 x;$
 $\left(\int_3^x e^{\sqrt{y}} dy \right)' = e^{\sqrt{x}}$ и т.д.

§5. Формула Ньютона-Лейбница.

Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл, не прибегая к интегральным суммам.

Пусть $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Известно, что две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное число,

поэтому $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$.

Для определения величины C положим в последнем равенстве $x = a$, тогда

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C = 0, \text{ следовательно } C = -F(a).$$

Поэтому:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C \text{ и следовательно } \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

В частности: при $x = b$, получим $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, или, в силу

инвариантности интеграла, имеем:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)} - \text{формула Ньютона – Лейбница.}$$

Определение 1. Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ равен приращению первообразной для подынтегральной функции на отрезке интегрирования $[a; b]$, т.е. $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример:

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{0.5} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Замечания:

1. Формула Ньютона - Лейбница была выведена только для непрерывных функций.
2. Подходы к интегрированию у Ньютона и Лейбница были различные. Лейбниц развивал чистый анализ, исходя из абстрактных понятий. Ньютон рассматривал математику только как способ для физических исследований. Название этой формулы до некоторой степени условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница именно такой формулы не было. Но они независимо друг от друга установили связь между дифференцированием и интегрированием. Лейбниц ввел обозначения:

$$dx ; d^2x ; \int f(x) dx ; \frac{dy}{dx}.$$

§6. Способы вычисления определенного интеграла.

1. Метод подстановки в определенном интеграле.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ - непрерывна на $[a; b]$.

Перейдем к новой переменной t , положив $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t) dt$. Вычислим пределы интегрирования для новой функции

$$x \quad \Big| \quad a \quad \Big| \quad b$$

t	α	β
-----	----------	---------

, где $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$, тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

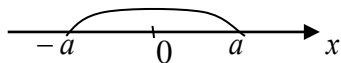
Пример:

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ \begin{array}{l|l|l} x & 3 & 8 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1) \cdot 2t dt}{t} = 2 \int_2^3 (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 =$$

$$= 2 \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - 2 \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) = 2 \cdot 6 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3}$$

Замечание. Для осуществления такой замены необходимо, чтобы $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ были непрерывны на $[\alpha; \beta]$.

2. Определенный интеграл на симметричном отрезке.



$$\int_{-a}^a f(x) dx = ?$$

Используя свойства интеграла можно записать:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (1)$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -u \\ dx = -du \\ \frac{x}{u} \Big|_{-a}^0 \Big|_{a}^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{В силу инвариантности интеграла получим:} \\ \int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(-x) dx \end{array}$$

Подставим полученное значение в выражение (1):

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \text{ или}$$

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a (f(-x) + f(x)) dx}$$

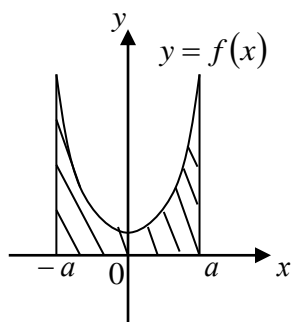
а) для четных функций

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx}$$

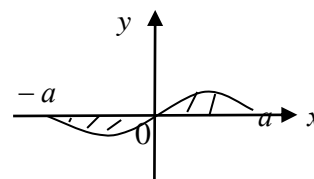
б) для нечетных функций

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0}$$

С **геометрической** точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, следовательно графически эта формула может быть изображена следующим образом:



четная



нечетная